Linie geodezyjne na elipsoidzie obrotowej

Do przeczytania i zrozumienia tego tekstu wymagana jest znajomość analizy tensorowej.

Przez większość tekstu będą używane współrzędne geocentryczne o oznaczeniach:

ϕ – szerokość geocentryczna

λ – długość geocentryczna

Równanie elipsoidy obrotowej we współrzędnych kartezjańskich:

$x = a\cos\phi\cos\lambda$

$y = a\cos\phi\sin\lambda$

$z = b\sin\phi$

Wektory bazowe kowariantne na powierzchni elipsoidy obrotowej wyrażone w bazie kartezjańskiej:

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\phi} = \hat{x}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \hat{y}\frac{\partial y}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial z}{\partial\phi} = -a\sin\phi\cos\lambda\,\hat{x} - a\sin\phi\sin\lambda\,\hat{y} + b\cos\phi\,\hat{z}$$

$$\vec{e}_\lambda = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\lambda} = \hat{x}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \hat{y}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \hat{z}\frac{\partial z}{\partial\lambda} = -a\cos\phi\sin\lambda\,\hat{x} + a\cos\phi\cos\lambda\,\hat{y}$$

Tensor metryczny:

$$\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_\phi = a^2\sin^2\phi\cos^2\lambda + a^2\sin^2\phi\sin^2\lambda + b^2\cos^2\phi = a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi$$

$$\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_\lambda = a^2\sin\phi\cos\lambda\cos\phi\sin\lambda - a^2\sin\phi\sin\lambda\cos\phi\cos\lambda = 0$$

$$\vec{e}_\lambda\cdot\vec{e}_\lambda = a^2\cos^2\phi\sin^2\lambda + a^2\cos^2\phi\cos^2\lambda = a^2\cos^2\phi$$

$$g = \begin{pmatrix} a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\phi \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\cos^2\phi} \end{pmatrix}$$

Symbole Christoffela:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial\xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial\xi^i}\right)$$

W następnych wzorach tej sekcji (Symbole Christoffela) nie stosuję konwencji sumacyjnej.

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\phi} = 2a^2\sin\phi\cos\phi - 2b^2\cos\phi\sin\phi = a^2\sin 2\phi - b^2\sin 2\phi = (a^2 - b^2)\sin 2\phi$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial\phi} = -2a^2\cos\phi\sin\phi = -a^2\sin 2\phi$$

$$\Gamma_{\phi\phi\phi} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2\phi$$

$$\Gamma_{\phi\lambda\lambda} = \frac{1}{2}a^2\sin 2\phi$$

$\Gamma_{\lambda\phi\lambda} = -\frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$

$\Gamma_{\lambda\lambda\phi} = -\frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$

Pozostałe symbole Christoffela pierwszego rodzaju są równe zero.

$\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi\phi} + g^{\phi\lambda}\Gamma_{\lambda\phi\phi} = \frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)\sin 2\phi}{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi} = \frac{(a^2-b^2)\,\mathrm{tg}\,\phi}{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\phi + b^2}$

$\Gamma^{\phi}{}_{\lambda\lambda} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\lambda\lambda} + g^{\phi\lambda}\Gamma_{\lambda\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin 2\phi}{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi} = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\phi}{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\phi + b^2}$

$\Gamma^{\lambda}{}_{\phi\lambda} = g^{\lambda\phi}\Gamma_{\phi\phi\lambda} + g^{\lambda\lambda}\Gamma_{\lambda\phi\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{a^2 \sin 2\phi}{a^2 \cos^2\phi} = -\,\mathrm{tg}\,\phi$

$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\phi} = g^{\lambda\phi}\Gamma_{\phi\lambda\phi} + g^{\lambda\lambda}\Gamma_{\lambda\lambda\phi} = -\frac{1}{2}\frac{a^2 \sin 2\phi}{a^2 \cos^2\phi} = -\,\mathrm{tg}\,\phi$

Pozostałe symbole Christoffela drugiego rodzaju są równe zero.

Równanie linii geodezyjnej:

$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i{}_{jk}\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k = 0$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + \Gamma^{\phi}{}_{\lambda\lambda}\dot{\lambda}^2 = 0 \\ \ddot{\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\phi\lambda}\dot{\phi}\dot{\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\phi}\dot{\lambda}\dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \frac{(a^2-b^2)\,\mathrm{tg}\,\phi}{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\phi + b^2}\dot{\phi}^2 + \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\phi}{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\phi + b^2}\dot{\lambda}^2 = 0 \\ \ddot{\lambda} - 2\,\mathrm{tg}\,\phi\,\dot{\phi}\dot{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \frac{e^2\,\mathrm{tg}\,\phi}{\mathrm{tg}^2\,\phi + 1 - e^2}\dot{\phi}^2 + \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{\mathrm{tg}^2\,\phi + 1 - e^2}\dot{\lambda}^2 = 0 \\ \ddot{\lambda} = 2\,\mathrm{tg}\,\phi\,\dot{\phi}\dot{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathrm{tg}^2\,\phi + 1 - e^2)\ddot{\phi} + \mathrm{tg}\,\phi\left(e^2\dot{\phi}^2 + \dot{\lambda}^2\right) = 0 \\ \ddot{\lambda} = 2\,\mathrm{tg}\,\phi\,\dot{\phi}\dot{\lambda} \end{cases}$$

Warunki początkowe:

ϕ_0 – początkowa szerokość geocentryczna

λ_0 – początkowa długość geocentryczna

Początkową długość wektora prędkości najlepiej przyjąć równą 1, wtedy rówanania całkuje się w zakresie $t \in \langle 0, s\rangle$, gdzie s to całkowita długość drogi (wyrażona w jednostkach tych samych co a i b !!!).

$\hat{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}$ – wektor jednostkowy w kierunku północnym (prostopadły do $\vec{e}_\lambda$, bo $g_{\phi\lambda} = 0$)

$\hat{e}_\lambda = \frac{\vec{e}_\lambda}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}$ – wektor jednostkowy w kierunku wschodnim (prostopadły do $\vec{e}_\phi$, bo $g_{\phi\lambda} = 0$)

$\vec{v}_0 = \dot{\phi}_0\vec{e}_\phi + \dot{\lambda}_0\vec{e}_\lambda$ – wektor początkowy prędkości (wzór ogólny)

$\vec{v}_0 = \cos\alpha\,\hat{e}_\phi + \sin\alpha\,\hat{e}_\lambda$ – wektor początkowy prędkości w kierunku α (naliczanym od kierunku północnego)

$\vec{v}_0 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\phi_0 + b^2\cos^2\phi_0}}\vec{e}_\phi + \frac{\sin\alpha}{a\cos\phi_0}\vec{e}_\lambda$

$\dot{\phi}_0 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi_0 + b^2 \cos^2 \phi_0}}$

$\dot{\lambda}_0 = \frac{\sin\alpha}{a \cos\phi_0}$

Częściowe rozwiązanie drugiego równania różniczkowego:

$\dot{\lambda} = u$

$\dot{u} = 2 \operatorname{tg}\phi\, \dot{\phi} u$

$\frac{du}{dt} = 2 \operatorname{tg}\phi \frac{d\phi}{dt} u$

$\frac{du}{u} = 2 \operatorname{tg}\phi\, d\phi$

$\int \frac{du}{u} = 2 \int \operatorname{tg}\phi\, d\phi$

$\ln|u| = 2 \ln|\sec\phi| + c_1$

$u = c_1 \sec^2\phi$

$\dot{\lambda} = c_1 \sec^2\phi$

$\dot{\lambda}_0 = c_1 \sec^2\phi_0$ – podstawienie wiadomych wartości początkowych, aby wyeliminować c_1

$\frac{\sin\alpha}{a\cos\phi_0} = c_1 \sec^2\phi_0$

$c_1 = \frac{\sin\alpha \cos\phi_0}{a}$

$\dot{\lambda} = \frac{\sin\alpha \cos\phi_0 \sec^2\phi}{a}$

Częściowe rozwiązanie pierwszego równania różniczkowego:

$(\operatorname{tg}^2\phi + 1 - e^2)\ddot{\phi} + \operatorname{tg}\phi \left(e^2\dot{\phi}^2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^4\phi}{a^2}\right) = 0$

Równanie różniczkowe jest postaci $F(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) = 0$, stosujemy podstawienie $\dot{\phi} = u$, $\ddot{\phi} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = u\frac{du}{d\phi}$

$(\operatorname{tg}^2\phi + 1 - e^2)u\frac{du}{d\phi} + \operatorname{tg}\phi \left(e^2u^2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^4\phi}{a^2}\right) = 0$

$(\operatorname{tg}^2\phi + 1 - e^2)\frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}u^2 + \operatorname{tg}\phi \left(e^2u^2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^4\phi}{a^2}\right) = 0$

Stosujemy podstawienie $u^2 = v$, $u = \sqrt{v}$, $\dot{\phi} = \sqrt{v}$

$\frac{\operatorname{tg}^2\phi + 1 - e^2}{2}\frac{dv}{d\phi} + \operatorname{tg}\phi \left(e^2 v + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^4\phi}{a^2}\right) = 0$

$v = \frac{c_2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^2\phi}{a^2}}{e^2\cos^2\phi - 1}$

$\dot{\phi}^2 = \frac{c_2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^2\phi}{a^2}}{e^2\cos^2\phi - 1}$

${\dot{\phi}_0}^2 = \frac{c_2 + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\phi_0 \sec^2\phi_0}{a^2}}{e^2\cos^2\phi_0 - 1}$ – podstawienie znanych wartości początkowych, aby wyeliminować c_2

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\phi_0+b^2\cos^2\phi_0}=\frac{c_2+\frac{\sin^2\alpha}{a^2}}{e^2\cos^2\phi_0-1}$$

$$\frac{\cos^2\alpha(e^2\cos^2\phi_0-1)}{a^2\sin^2\phi_0+b^2\cos^2\phi_0}=c_2+\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=\frac{\cos^2\alpha(e^2\cos^2\phi_0-1)}{a^2\sin^2\phi_0+(a^2-a^2e^2)\cos^2\phi_0}-\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=\frac{\cos^2\alpha(e^2\cos^2\phi_0-1)}{a^2\sin^2\phi_0+a^2\cos^2\phi_0-a^2e^2\cos^2\phi_0}-\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=\frac{\cos^2\alpha(e^2\cos^2\phi_0-1)}{a^2-a^2e^2\cos^2\phi_0}-\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=\frac{\cos^2\alpha(e^2\cos^2\phi_0-1)}{a^2(1-e^2\cos^2\phi_0)}-\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=-\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$c_2=-\frac{1}{a^2}$$

$$\dot{\phi}^2=\frac{-\frac{1}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}{a^2}}{e^2\cos^2\phi-1}$$

$$\dot{\phi}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}{1-e^2\cos^2\phi}}$$

Dwa równania naraz:

$$\begin{cases}\dot{\phi}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}{1-e^2\cos^2\phi}}\\ \dot{\lambda}=\frac{\sin\alpha\cos\phi_0\sec^2\phi}{a}\end{cases}$$

Rozwiązanie pierwszego równania różniczkowego:

$$dt=a\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi$$

$a\int_{\phi_0}^{\phi}\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi=\int_0^s dt$ – szybkość wynosi 1, więc $t=s$

$$s=a\int_{\phi_0}^{\phi}\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi$$

Rozwiązanie drugiego równania różniczkowego:

$$d\lambda=\frac{\sin\alpha\cos\phi_0\sec^2\phi}{a}a\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}d\lambda=\sin\alpha\cos\phi_0\int_{\phi_0}^{\phi}\sec^2\phi\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi$$

$$\lambda=\lambda_0+\sin\alpha\cos\phi_0\int_{\phi_0}^{\phi}\sec^2\phi\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\phi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\phi_0\sec^2\phi}}\,d\phi$$

*** Związek między szerokością geocentryczną $\boldsymbol{\phi}$ i szerokością geodezyjną $\boldsymbol{\theta}$:**

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{tg}\theta\right)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\phi}{\sqrt{1-e^2}}\right)$$