Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy przez $K(t)$ cenę filiżanki kawy w chwili t. Z treści zadania wiemy, że

$$K''(t) = a(t) = -\frac{3}{4}K\omega^2 \sin(\omega t).$$

Całkując stronami ostatnie wyrażenie dostajemy

$$K'(t) = \frac{3}{4}K\omega \cos(\omega t) + C_1,$$

ale z treści zadania wiemy, że $K'(3) = 0$, zatem

$$0 = \frac{3}{4}K\omega \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + C_1 = \frac{3}{4}K\omega \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_1 = \frac{3}{4}K\omega \cdot 0 + C_1 = C_1.$$

Stąd już mamy

$$K'(t) = \frac{3}{4}K\omega \cos(\omega t).$$

Z kolei całkując powyższą równość otrzymujemy

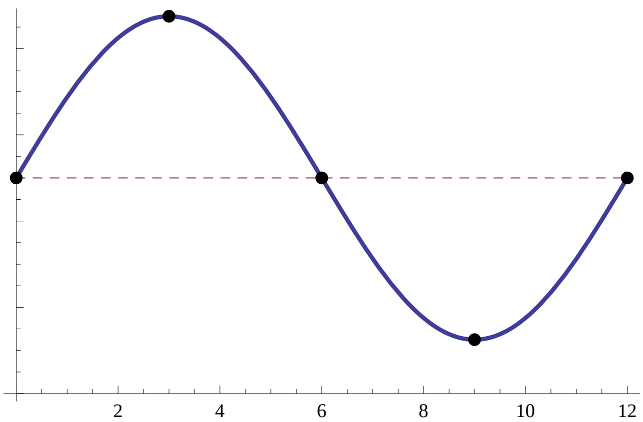
$$K(t) = \frac{3}{4}K \sin(\omega t) + C_2.$$

Tym razem wykorzystujemy dane w zadaniu $K(0) = K$, stąd dostajemy równanie

$$K = \frac{3}{4}K \sin(\omega \cdot 0) + C_2 = \frac{3}{4}K \cdot 0 + C_2 = C_2.$$

Mamy więc gotową zależność ceny filiżanki kawy od czasu:

$$K(t) = \frac{3}{4}K \sin(\omega t) + K.$$



Rysunek 1: Wykres ceny filiżanki kawy w zależności od czasu.

Zauważmy, że **Doktor X** musi spożyć więcej niż jedną filiżankę kawy, gdyż $U_0 = 15$. Ponieważ mamy też do dyspozycji maksymalnie dwie filiżanki kawy, **Doktor X** musi zrealizować swoje zamówienie najpóźniej o godzinie 9:00 (gdyż za pomocą dwóch pełnych filiżanek kawy możemy dostarczyć organizmowi maksymalnie 30 utyli, co dokładnie odpowiada zapotrzebowaniu na kawę **Doktora X** o godzinie 9:00).

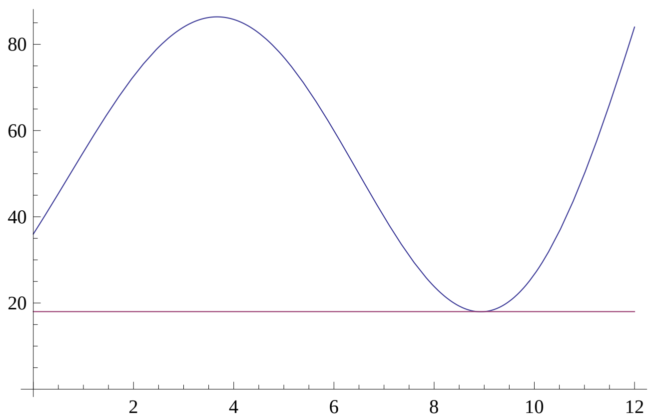
Nasze zadanie polega więc na znalezieniu takich chwil $t \in [0, 9]$, że **Doktor X** jest w stanie kupić za posiadany bon potrzebną ilość kawy do zaspokojenia swoich potrzeb egzystencjalnych. Innymi słowy, łączna opłata za kawę, czyli ilość potrzebnej kawy razy cena jednej pełnej filiżanki nie powinna przekraczać $\frac{K}{2}$. Pamiętając, że 1 utyl jest dostarczany po spożyciu $\frac{1}{15}$ filiżanki kawy (o ile $t \in [0, 9]$), możemy powyższą wypowiedź opisać prostą nierównością

$$\frac{1}{15}\left(\frac{5}{3}t + 15\right) \cdot \left(\frac{3}{4}K \sin(\omega t) + K\right) \leqslant \frac{K}{2}.$$

Co można zapisać w postaci

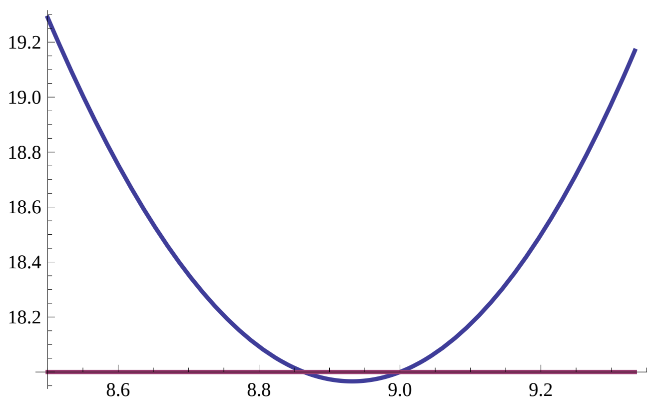
$$g(t) = (t + 9) \cdot \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4\right) \leqslant 18.$$

Oczywiście w tym momencie możemy posłużyć się programem komputerowym i podać wynik, ale przyjrzymy się tej nierówności nieco bliżej.



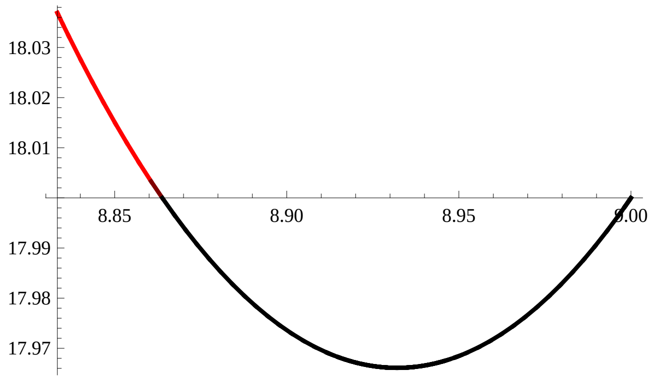
Rysunek 2: Wzajemne położenie funkcji $g(t)$ oraz funkcji stałej równej 18.

Po wstępnej analizie powyższego wykresu zauważamy, że w okolicach godziny 9:00 nierówność $g(t) \leqslant 18$ może być prawdziwa (nie chcemy tu wnikać w szczegółowe obliczenia, które ze względu na skomplikowany charakter funkcji $g(t)$ nie mogą być precyzyjnie przeprowadzone, dlatego traktujemy wykres jako źródło informacji na temat relacji pomiędzy $g(t)$ a 18). Przybliżmy wykres w celu analizy przedziału czasowego od 8:30 do 9:20.



Rysunek 3: Analiza nierówności $g(t) \leqslant 18$ dla $t \in [8 + \frac{1}{2}, 9 + \frac{1}{3}]$.

Warto zauważyć, że $g(9) = 18$, co za tym idzie, **Doktor X** może dokonać swojego zamówienia tylko dla chwil znajdujących się w pewnym krótkim przedziale $[x, 9]$. Jednak pamiętamy też, że od 8:50:00 do 8:59:59 **Dingo** ma przerwę na papierosa. Sprawdźmy więc zależność pomiędzy liczbami x a $8 + \frac{5}{6}$.



Rysunek 4: Analiza nierówności $g(t) \leqslant 18$ dla $t \in [8 + \frac{5}{6}, 9]$.

Teraz już jednoznacznie widać, że $x > 8 + \frac{5}{6}$ (a dokładniej $x \approx 8.86382$), zatem **Doktor X** musi poczekać ze swoim zamówieniem do 9:00:00. Doliczając pobyt w toalecie dostajemy ostatecznie, że **Doktor X** opuścił bar o godzinie 9:09.