

Regulamin

1. Konkurs, zwany też mini-konkursem, trwa od **18:00 09.11.2012 do 23:59 16.11.2012**
2. Konkurs polega na rozwiązaniu podanej niżej zagadki, tj. podanie odpowiedzi wraz z uzasadnieniem
3. Rozwiązanie zagadki należy nadesłać za pośrednictwem Forum matematyka.pl w formie prywatnej wiadomości do użytkownika Liga
4. Jedna osoba może nadesłać tylko jedno rozwiązanie
5. Poprawność rozwiązań oceniać będzie jury
6. Wśród autorów poprawnych rozwiązań zostaną wylosowane osoby, którym zostanie zadane pytanie finałowe. Osoby, które udzielą prawidłowej odpowiedzi na finałowe pytanie, otrzymają nagrodę

Zagadka o psie Dingo



Barman ustalił cenę filiżanki kawy na $K > 0$ denarów. Pod nieobecność właściciela barem zajmował się jego pies **Dingo**. Po raz pierwszy stał za barem, więc obserwował, co się działo, gdy zmieniał ustaloną przez swojego pana cenę i robił to przez czas $T = 12$ godzin od północy. Najbardziej interesowały go skrajne przypadki, dlatego ustalał wartość ceny kawy z przyspieszeniem

$$a(t) = -\frac{3}{4}K\omega^2 \sin(\omega t),$$

gdzie $t \in [0, 12]$, K i ω są ustalone, przy czym $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Oczywiście wszyscy konsumenci wiedzieli o tym. Wiemy też, że **Dingo** był tak zainteresowany reakcją klientów na cenę o godzinie 3:00, że w tej chwili nie zmieniał jej z żadną prędkością.

Doktor X obudził się w tym barze przed północą i dokładnie o godzinie 0:00 zaczął odczuwać chęć wypicia kawy. Mógł wrócić do domu dopiero po zaspokojeniu tej potrzeby, czyli po "zdobyciu" przynajmniej określonej ilości utyli U . Na samym początku potrzebował wypić dokładnie jedną pełną filiżankę kawy. Nie mógł jej jednak wtedy kupić, ponieważ w portfelu

miał tylko bon na kawę o wartości $\frac{1}{2}K$.

Wypicie pierwszej pełnej filiżanki kawy dawało 15 użyty. Ponieważ do każdej następnej filiżanki pies **Dingo** zawsze dodawał śmietankę gratis, toteż wypicie drugiej kawy również dostarczało organizmowi 15 użyty, i dalej, spożycie każdej kolejnej pełnej filiżanki kawy dawało o 5 użyty mniej niż poprzednia kawa. Działo się tak, gdyż radość związana ze spożyciem kawy dążyła do zera znacznie szybciej, niż korzyści z przebywania w domu. Wiemy też, że zapotrzebowanie **Doktora X** na kawę było zależne od czasu i dane wzorem

$$U(t) = \frac{5}{3}t + U_0,$$

gdzie U_0 to zapotrzebowanie na użyty w chwili $t = 0$. Przestało ono wzrastać po wypiciu potrzebnej ilości kawy do danej chwili t , gdyż wiązało się to z powrotem do domu, czyli ze zwiększeniem zadowolenia.

Jeżeli przyjmiemy, że:

- **Doktor X** chciał jak najwcześniej wrócić do domu,
- **Dingo** realizował zamówienia klientów natychmiast (włącznie ze śmietanką),
- konsument wypijał każdą kawę natychmiast w chwili zakupu (tak, że $U(t)$ nie miało możliwości zmiany),
- czas pomiędzy wypiciem kolejnych kaw był równy 0,
- czas pomiędzy zaspokojeniem zapotrzebowania na użyty a wyjściem z baru **Doktora X** był równy 9 minut (ponieważ korzystał jeszcze z darmowej toalety),
- **Doktor X** mógł skorzystać z bonu tylko raz (tj. wszystkich zakupów musiał dokonać za jednym razem),
- konsument mógł zamawiać dowolną dodatnią ilość kawy, a koszt kawy był wprost proporcjonalny do zamówionej ilości; na przykład, jeśli konsument zamówił 2.3 filiżanki kawy, wówczas dostawał jedną pełną filiżankę kawy, drugą pełną filiżankę kawy i trzecią filiżankę zawierającą 30% ilości kawy w pełnej filiżance, jego opłata wynosiła 2.3 razy cena jednej pełnej filiżanki kawy, a ilość dostarczonych użyty wynosiła $15 + 15 + 0.3 \cdot (15 - 5) = 33$,
- **Dingo** potrzebował prawie wszystkie naczynia i zostały mu tylko dwie filiżanki; był on bardzo zestresowany z tego powodu i przez każde 10 minut przed wybiciem kolejnej pełnej godziny zegarowej robił sobie przerwę na papierosa (innymi słowy, konsument nie miał możliwości zamówienia niczego w barze od 0:50:00 do 0:59:59, od 1:50:00 do 1:59:59, ..., od 11:50:00 do 11:59:59),

to o której godzinie **Doktor X** wyszedł z baru? Odpowiedź uzasadnij.

Zagadkę zaproponował Sylwester Błaszczuk.